

Approches Bayésiennes pour la reconstruction de phase

Application à l'optique des milieux complexes

Angélique DRÉMEAU^{1,*}, Antoine LIUTKUS², David MARTINA³, Ori KATZ^{3,4}, Christophe SCHÜLKE⁵, Florent KRZAKALA^{6,7},
Sylvain GIGAN^{3,6}, Laurent DAUDET^{4,5}

¹ENSTA Bretagne et Lab-STICC UMR 6285, Brest, F-29200, France

²Inria, CNRS, Loria UMR 7503, Villers-lès-Nancy, F-54600, France

³Laboratoire Kastler Brossel, UPMC, ENS, Collège de France, CNRS UMR 8552, Paris, F-75005, France

⁴Institut Langevin, ESPCI et CNRS UMR 7587, Paris, F-75005, France

⁵Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, Paris, F-75013, France

⁶Sorbonne Universités, UPMC Université Paris 06, F-75005, Paris, France

⁷LPS-ENS et CNRS UMR 8550, Paris, F-75005, France

*angelique.dremeau@ensta-bretagne.fr

Résumé – Le problème de reconstruction de phase, *i.e.*, la reconstruction d'un signal complexe à partir de mesures d'amplitudes, est un problème bien connu de la littérature. Adoptant un point de vue Bayésien et modélisant les phases non observées par des variables cachées, nous proposons ici une formulation généralisant différents cadres applicatifs, dont le cas de l'acquisition compressée. Sa résolution exploite une approximation de champ moyen et recourt à un algorithme variationnel Bayésien EM. Elle est ici particularisée à deux problèmes de reconstruction de phase rencontrés en propagation d'ondes optiques à travers des milieux complexes : la calibration du milieu et le contrôle du front d'onde permettant la focalisation. Les résultats obtenus dans ce cadre expérimental sont prometteurs et ouvrent la voie à d'autres exploitations de l'approche, par exemple l'imagerie.

Abstract – The phase recovery problem, *i.e.*, the reconstruction of a complex signal from amplitude measurements, is a well-known problem in the literature. Adopting a Bayesian point of view and modeling the unknown phases by hidden variables, we propose here a formulation generalizing different applicative frameworks, among which compressed sensing. Its resolution exploits a mean-field approximation and resorts to a variational Bayesian EM algorithm. It is here particularized to two phase recovery problems encountered in the propagation of optical waves through complex media: the calibration of the medium and the control of the wave front for focusing purposes. The results obtained within this experimental framework are promising and pave the way of other exploitations of the approach, such as imaging.

1 Introduction

Reconstruire un signal complexe à partir de seules mesures d'amplitudes, problème connu sous le nom de reconstruction de phase, est au coeur de nombreuses applications physiques. Formellement, le problème s'exprime de la façon suivante. Observant $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^M$, de façon possiblement bruitée, à travers une matrice complexe \mathbf{D} de dimension $M \times N$, on cherche à reconstruire le signal $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$, tel que

$$\mathbf{y} = |\mathbf{D}\mathbf{z}|. \quad (1)$$

Le problème est non-convexe, difficile à résoudre. On peut grossièrement diviser les différentes approches en deux familles.

1. *Les algorithmes par projections alternées* itèrent des projections sur l'espace engendré par la matrice de mesures et sur le domaine de l'objet recherché. Parmi ces approches, on peut mentionner les travaux de Gerchberg

& Saxton [1], Fienup [2] et Griffin & Lim [3].

2. *Les algorithmes basés sur des relaxations convexes* reformulent le problème de façon relaxée, permettant une résolution par des procédures d'optimisation standard. Deux des principales approches de ce type, *PhaseLift* [4] et *PhaseCut* [5], reposent en particulier sur des procédures de programmation semi-définies.

Outre ces approches, de récentes contributions se sont intéressées à la reconstruction "compressée" de phase. L'idée est de s'appuyer sur une hypothèse supplémentaire - le signal recherché est parcimonieux dans une base connue - pour diminuer le nombre de mesures nécessaires à la résolution du problème. Les travaux s'intéressant à cette approche sont encore peu nombreux, on retrouve les grandes familles citées ci-dessus. Les procédures d'optimisation convexes sont à la base des contributions [6, 7], tandis que des approches par optimisations locales successives sont par exemple proposées dans [8].

Un dernier point de vue, Bayésien, a été récemment abordé dans [9]. Modélisant l'absence de phase par une variable cachée, l'approche proposée repose sur une approximation variationnelle et fait appel à un algorithme de type somme-produit. Alternative à cette approche, nous avons proposé dans [10] une autre méthode de résolution, basée sur un algorithme variationnel Bayésien Expectation-Maximisation (VBEM) et nous sommes penchés sur une application optique de cet algorithme [11], avec des résultats prometteurs. Cet article se place dans la continuité de ces travaux. Après un rappel de la méthodologie mise en place et une formulation générale des modèles considérés, nous exposons quelques derniers résultats en lien avec l'application en focalisation à travers un milieu diffusant qui nous intéresse plus particulièrement.

2 Reconstruction de phase Bayésienne

2.1 Modéliser l'absence

Plaçant le problème (1) dans un cadre Bayésien, nous introduisons de nouvelles variables, modélisant, d'une part les phases absentes des observations, et de l'autre le bruit d'acquisition. Ainsi, chaque mesure réelle positive y_k , $k \in \{1 \dots M\}$ de y est exprimée comme

$$y_k = e^{j\theta_k} \left(\sum_{i=1}^N z_i d_{ki} + n_k \right), \quad (2)$$

où $\theta_k \in [0, 2\pi)$ représente le conjugué de sa phase manquante, d_{ki} est le i -ème élément de la k -ième colonne \mathbf{d}_k du dictionnaire \mathbf{D} et n_k est un bruit circulaire Gaussien (noté \mathcal{CN}) de moyenne nulle et de variance σ_n^2 . On suppose de plus que

$$p(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{k=1}^M p(\theta_k) \quad \text{avec} \quad p(\theta_k) = \frac{1}{2\pi}. \quad (3)$$

Sous ces hypothèses, l'absence d'observation des phases est naturellement prise en compte dans le modèle puisque la marginalisation sur θ_k conduit à une distribution sur y_k qui dépend seulement des modules de y_k et $\sum_i z_i d_{ki}$.

2.2 Question d'a priori...

Nous considérons ici un modèle Bernoulli-Gaussien, tel que $\mathbf{z} = \mathbf{s} \odot \mathbf{x}$, où \odot représente ici le produit terme à terme, et

$$p(\mathbf{s}) = \prod_{i=1}^N p(s_i) \quad \text{avec} \quad p(s_i) = \text{Ber}(p_i), \quad (4)$$

$$p(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^N p(x_i) \quad \text{avec} \quad p(x_i) = \mathcal{CN}(\mu_i, \sigma_x^2). \quad (5)$$

Ce modèle est une légère généralisation de modèles bien connus de la littérature. Ainsi, pour $p_i \ll 1$ et $\mu_i = 0$, $\forall i$, on retrouve le modèle Bernoulli-Gaussien classiquement considéré comme a priori parcimonieux [9, 12].

2.3 Approximations variationnelles

Considérant le modèle (2)-(5), on s'intéresse au problème d'estimation marginalisée au sens du Maximum A Posteriori

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}}{\text{argmax}} p(\mathbf{s}|\mathbf{y}), \quad (6)$$

avec $p(\mathbf{s}|\mathbf{y}) = \int_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}} p(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$. En raison de la marginalisation sur les différentes variables, le calcul direct de $p(\mathbf{s}|\mathbf{y})$ est difficile. Dans cet article, nous nous focalisons sur les solutions apportées par une approximation de champ moyen de $p(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ (cf. [12]), telle que :

$$\hat{q}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}) = \underset{q \in \mathcal{F}}{\text{argmin}} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}} q(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}) \log \left(\frac{q(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})} \right) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\theta} ds,$$

$$\text{et } \mathcal{F} = \left\{ q \mid q = \prod_{i=1}^N q_i(x_i, s_i) \prod_{k=1}^M q_k(\theta_k) \right\}. \quad (7)$$

Cette optimisation peut être résolue de façon efficace par un algorithme VBEM. L'algorithme, itératif, met à jour à chaque itération l'ensemble des facteurs de (7) successivement, par :¹

$$q(x_i | s_i) = \mathcal{CN}(m(s_i), \Sigma(s_i)), \quad (8)$$

$$q(s_i) \propto \Sigma(s_i) \exp \left(\frac{m(s_i)^* m(s_i)}{\Sigma(s_i)} - \frac{\mu_i^* \mu_i}{\sigma_x^2} \right) p(s_i), \quad (9)$$

$$q(\theta_k) = \frac{1}{2\pi I_0 \left(\frac{2}{\sigma_n^2} |y_k^* \langle z_k \rangle| \right)} \exp \left(\frac{2}{\sigma_n^2} \Re(y_k^* \langle z_k \rangle e^{j\theta_k}) \right), \quad (10)$$

où

$$\Sigma(s_i) = \frac{\sigma_n^2 \sigma_x^2}{\sigma_n^2 + s_i \sigma_x^2 \mathbf{d}_i^H \mathbf{d}_i}, \quad (11)$$

$$m(s_i) = \frac{\sigma_n^2 \mu_i + s_i \sigma_x^2 \mathbf{d}_i^H \langle \mathbf{r}_i \rangle}{\sigma_n^2 + s_i \sigma_x^2 \mathbf{d}_i^H \mathbf{d}_i}, \quad (12)$$

$$\langle \mathbf{r}_i \rangle = \bar{\mathbf{y}} - \sum_{\ell \neq i} q(s_\ell = 1) m(s_\ell = 1) \mathbf{d}_\ell, \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \left[y_k e^{j \arg(y_k^* \langle z_k \rangle)} \frac{I_1 \left(\frac{2}{\sigma_n^2} |y_k^* \langle z_k \rangle| \right)}{I_0 \left(\frac{2}{\sigma_n^2} |y_k^* \langle z_k \rangle| \right)} \right]_{k=\{1 \dots M\}} \quad (14)$$

$$\langle z_k \rangle = \sum_{i=1}^N \langle s_i x_i \rangle d_{ki} = \sum_{i=1}^N q(s_i = 1) m(s_i = 1) d_{ki}, \quad (15)$$

et I_0 (resp. I_1) est la fonction de Bessel modifiée de la première espèce d'ordre 0 (resp. 1).

Revenant au problème (6), une approximation de $p(\mathbf{s}|\mathbf{y})$ est déduite alors simplement de

$$p(\mathbf{s}|\mathbf{y}) = \int_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}} p(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}), \quad (16)$$

$$\simeq \int_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}} \prod_i q(x_i | s_i) q(s_i) \prod_k q(\theta_k), \quad (17)$$

$$= \prod_i q(s_i). \quad (18)$$

Utilisant cette approximation, le problème se résout par une simple opération de seuillage, *i.e.*, $\hat{s}_i = 1$ si $q(s_i = 1) > 0.5$, $\hat{s}_i = 0$ sinon. Connaissant le support $\hat{\mathbf{s}}$, les coefficients $\hat{\mathbf{x}}$ peuvent être alors estimés selon $\hat{x}_i = m(\hat{s}_i)$.

1. Par souci de clarté, on omet ici le numéro d'itération, cf. [12].

3 Application à l'optique à travers les milieux complexes

La propagation d'ondes en milieux complexes est un problème fondamental en physique. En optique, le problème est particulièrement d'importance pour l'imagerie : lorsque la lumière passe au travers d'un milieu fortement diffusant, tel qu'un tissu biologique, elle est rapidement atténuée, empêchant les techniques d'imagerie conventionnelle ; de plus le caractère aléatoire des diffusions génère un bruit dit de speckle, généralement considéré comme gênant pour l'imagerie.

Récemment, le contrôle des fronts d'onde par des modulateurs spatiaux de lumière (SLM) s'est imposé comme l'outil permettant de manipuler une lumière cohérente diffusée. Parmi les méthodes exploitant les SLM, une approche consiste à mesurer dans un premier temps la matrice dite de transmission, caractérisant la propagation de la lumière à travers le milieu, du modulateur au détecteur. Ceci pose cependant plusieurs difficultés pratiques. D'une part, les capteurs ne mesurent que l'intensité du champ. Par ailleurs, il y a intérêt à utiliser comme SLM un modulateur à micro-miroirs (DMD) : opérant à des fréquences supérieures à 20kHz et offrant un grand nombre de micro-miroirs à relativement faible coût, les DMD n'autorisent néanmoins que des modulations d'amplitude binaires (*i.e.*, ON ou OFF sur chaque miroir). Enfin, le bruit expérimental relativement important rend difficile l'estimation.

Dans cette section, on montre comment la procédure proposée pour la reconstruction de phase peut être avantageusement utilisée à la fois pour estimer la matrice de transmission et pour focaliser à travers un milieu diffusant, avec le dispositif expérimental le plus simple : une source de lumière cohérente (laser), modulée spatialement en amplitude par le DMD, passe à travers le milieu diffusant (ici une simple couche de peinture blanche), avant d'être captée sur une caméra CCD. Les détails expérimentaux sont décrits dans [11].

3.1 Caractérisation du milieu

Le modèle sous-jacent de la propagation d'ondes en milieux complexes est linéaire : le signal \mathbf{y} en sortie, pour une image \mathbf{z} affichée sur le DMD, est tel que $\mathbf{y} = |\mathbf{D}\mathbf{z}|$ où \mathbf{D} , matrice de transmission, est à valeurs complexes, supposées réalisations de variables aléatoires gaussiennes i.i.d. lorsque la diffusion est suffisamment forte.

L'estimation de la matrice de transmission s'exprime comme un problème de calibration supervisée : on cherche \mathbf{D} connaissant un ensemble de P couples (\mathbf{z}, \mathbf{y}) . Formellement, le problème se réduit, par transposition, à une estimation ligne par ligne de la matrice \mathbf{D} , en absence de phase [11].

Revenant au modèle (4)-(5), on pose $p_i = 1$ et $\mu_i = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$. La procédure (8)-(15) conduit alors à une estimation de coefficients $\hat{\mathbf{z}}$ tous non nuls tels que

$$\hat{z}_i = \hat{x}_i = \frac{\sigma_x^2 \mathbf{d}_i^H \langle \mathbf{r}_i \rangle}{\sigma_n^2 + \sigma_x^2 \mathbf{d}_i^H \mathbf{d}_i}. \quad (19)$$

3.2 Focalisation à travers le milieu

La connaissance de la matrice de transmission peut être exploitée pour estimer la configuration du DMD permettant une observation donnée. Ici, on s'intéresse au cas particulier de la focalisation de la lumière avec un maximum d'intensité sur un ou plusieurs points cibles.

Les DMD n'autorisant que deux positions ON ou OFF, on peut les modéliser comme des réalisations binaires de variables de Bernoulli. Considérant le modèle (4)-(5), on pose alors $\mu_i = 1$ et $\sigma_x^2 \rightarrow 0$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$. Particularisées à ce cas, les expressions (8) et (9) prennent pour la première, la forme triviale $q(x_i | s_i) = \delta_{\mu_i}$ et pour la seconde

$$q(s_i) \propto p(s_i) \exp \left(s_i \frac{2 \Re(\mathbf{d}_i^H \langle \mathbf{r}_i \rangle) - \mathbf{d}_i^H \mathbf{d}_i}{\sigma_n^2} \right). \quad (20)$$

La règle de décision demeure par ailleurs inchangée, *i.e.*, $\hat{s}_i = 1$ si $q(s_i = 1) > 0.5$, $\hat{s}_i = 0$ sinon.

3.3 Résultats expérimentaux

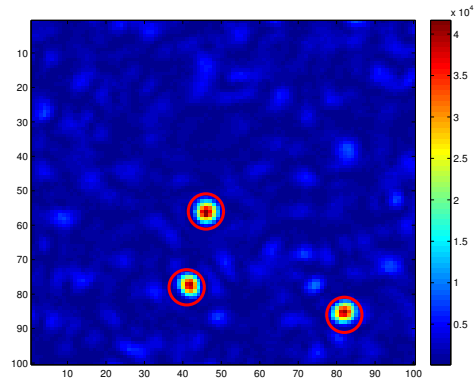


FIGURE 1 – Illustration de la focalisation de la lumière sur 3 points. Les cercles marquent les positions des cibles.

On évalue ici expérimentalement la performance de l'approche proposée pour la focalisation multi-cibles. Les entrées du DMD, prises de dimension $N = 1600$, sont estimées selon la procédure décrite dans la section précédente à partir de l'image de sortie désirée, focalisant sur $T \in \{1, \dots, 4\}$ points cibles. On fixe les paramètres de Bernoulli p_i à 0.5, remarquant que asymptotiquement (*i.e.*, pour N suffisamment grand), un miroir du DMD sur 2 est supposé ON [13]. La matrice de transmission, réduite aux lignes d'intérêt, est préalablement estimée selon la particularisation de la procédure de la section 3.1, par l'exploitation de $6N$ signaux d'entraînement, par exemple des vecteurs aléatoires.

On observe expérimentalement la sortie caméra correspondant à la configuration DMD estimée, comme illustré dans la Fig. 1. Pour évaluer de façon quantitative les performances en focalisation, on mesure le gain en intensité défini comme :

$$\eta \triangleq \frac{I_{\text{foc}}}{I_{\text{back}}}, \quad (21)$$

où I_{foc} est l'intensité mesurée sur les cibles après optimisation de la modulation binaire, I_{back} est l'intensité moyenne de l'arrière-plan. La mesure est calculée pour 100 tests.

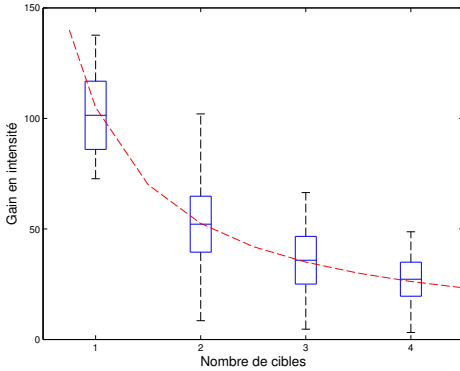


FIGURE 2 – Gain en intensité expérimental en fonction du nombre de cibles. Courbe en pointillés : meilleur fit en $1/T$.

La Fig. 2 présente les résultats en fonction du nombre de cibles, sous la forme de boîtes. Pour chacune d'entre elles, le segment du milieu représente le gain moyen $\bar{\eta}$ sur les 100 tests, les bornes supérieure et inférieure du rectangle définissent l'intervalle $[\bar{\eta} - \sigma_{\eta} \quad \bar{\eta} + \sigma_{\eta}]$ (où σ_{η} est l'écart-type empirique), dans lequel se trouve, sous hypothèse gaussienne, la majorité des tests, les moustaches représentent les valeurs minimum et maximum du gain, relevées sur l'ensemble des tests. Le gain en intensité idéal est donné analytiquement [13] par :

$$\langle \eta_{\text{idéal}} \rangle \approx 1 + \frac{1}{\pi} \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \quad (22)$$

Dans le cas non-idéal observé, un modèle simple [13] prend en compte le rapport signal-à-bruit (SNR) fini :

$$\langle \eta_{\text{non-idéal}} \rangle = \langle \eta_{\text{idéal}} \rangle \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{\text{SNR}}{\sqrt{N}} \right) \right) \alpha, \quad (23)$$

où $\alpha \simeq 0.97$ modélise l'illumination non-uniforme des miroirs.

Particularisant ces deux mesures à notre cas, sous les mêmes hypothèses sur α , on déduit $\langle \eta_{\text{idéal}} \rangle \simeq 255$ et un rapport signal-à-bruit tel que $\text{SNR} \simeq 16$ dB. Dans les limites de la modélisation suggérée, cette valeur peut permettre a posteriori d'affiner les paramètres d'initialisation des algorithmes de calibration et de focalisation.

Enfin, la Fig. 2 tend à montrer expérimentalement une dépendance en $1/T$ avec le nombre de cibles T (illustrée par la courbe en pointillés rouges), ce qui va dans le sens d'observations similaires dans la littérature [14]. Supposant une relation linéaire entre gain et nombre de miroirs optimisés, elle suggère qu'une proportion $1/T$ du nombre total N de miroirs est exploitée pour chacun des T points de focalisation.

4 Conclusion

L'étude présentée permet d'illustrer trois avantages des méthodes Bayésiennes pour le problème de reconstruction de phase.

En premier lieu, une grande souplesse de modélisation, le même modèle permettant ici à la fois d'estimer la matrice de transmission, et le contrôle de front d'onde pour la focalisation. Ensuite, la prise en compte explicite du bruit de mesure permettant de s'accommoder d'un faible SNR expérimental. Enfin, de bonnes propriétés de passage à l'échelle pour des problèmes de grande taille (cf. [11]), ce qui est une des principales limitations de la majeure partie des méthodes d'optimisation de l'état de l'art.

Références

- [1] R. Gerchberg and W. Saxton, "A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures," *Optik*, vol. 35, pp. 237–246, 1972.
- [2] J. R. Fienup, "Phase retrieval algorithms : a comparison," *Applied Optics*, vol. 21, no. 15, pp. 2758–2769, 1982.
- [3] D. Griffin and J. Lim, "Signal estimation from modified short-time Fourier transform," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Sig. Proc.*, vol. 32, no. 2, 1984.
- [4] E. Candès, T. Strohmer, and V. Voroninski, "Phaselift : exact and stable signal recovery from magnitude measurements via convex programming," *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. 66, no. 8, pp. 1241–1274, August 2013.
- [5] I. Waldspurger, A. d'Aspremont, and S. Mallat, "Phase recovery, maxcut and complex semidefinite programming," *Mathematical Programming Series A- Springer*, December 2013.
- [6] X. Li and V. Voroninski, "Sparse signal recovery from quadratic measurements via convex programming," *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 45, no. 5, 2013.
- [7] H. Ohlsson, A. Y. Yang, R. Dong, and S. S. Sastry, "Compressive phase retrieval from squared output measurements via semidefinite programming," *IFAC Symposium on System Identification*, vol. 16, no. 1, pp. 89–94, March 2012.
- [8] Y. Schechtman, A. Beck, and Y. C. Eldar, "Gespar : Efficient phase retrieval of sparse signals," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 62, no. 4, 2013.
- [9] P. Schniter and S. Rangan, "Compressive phase retrieval via generalized approximate message passing," in *Communication, Control, and Computing (Allerton)*, October 2012.
- [10] A. Drémeau and F. Krzakala, "Phase recovery from a Bayesian point of view : the variational approach," in *Proc. ICASSP*, 2015.
- [11] A. Drémeau *et al.*, "Reference-less measurement of the transmission matrix of a highly scattering material using a DMD and phase retrieval techniques," *Optics Express*, vol. 23, no. 9, 2015.
- [12] A. Drémeau, C. Herzet, and L. Daudet, "Boltzmann machine and mean-field approximation for structured sparse decompositions," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 60, no. 7, 2012.
- [13] D. Akbulut *et al.*, "Focusing light through random photonic media by binary amplitude modulation," *Optics Express*, vol. 19, no. 5, pp. 4017–4029, Feb. 2011.
- [14] I. M. Vellekoop and A. P. Mosk, "Focusing coherent light through opaque strongly scattering media," *Optics Letters*, vol. 32, no. 16, pp. 2309, 2007.